3.7.10 Umocňování mnohočlenů I

Předpoklady: 030709

Př. 1: Vyděl a výsledek ověř zkouškou. a) $\left(x^3+1\right):\left(x+1\right)$ b) $\left(2a^4-a^2+3a\right):\left(a+3\right)$

a)
$$
\begin{array}{l}
\left(x^3+1\right):\left(x+1\right)=x^2-x+1\\
\underline{-\left(x^3+x^2\right)}\\
\quad -x^2+1\\
\quad \underline{-\left(-x^2-x\right)}\\
\qquad x+1\\
\qquad \underline{-\left(x+1\right)}\\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Zkouška: $\left(x+1\right)\cdot\left(x^2-x+1\right)=x^3-x^2+x+x^2-x+1=x^3+1$

b)
$$
\begin{array}{l}
\left(2a^4-a^2+3a\right):\left(a+3\right)=2a^3-6a^2+17a-48 \quad (\text{zbytek } 144)\\
\underline{-\left(2a^4+6a^3\right)}\\
\quad -6a^3-a^2+3a\\
\quad \underline{-\left(-6a^3-18a^2\right)}\\
\qquad 17a^2+3a\\
\qquad \underline{-\left(17a^2+51a\right)}\\
\qquad\quad -48a\\
\qquad\quad \underline{-\left(-48a-144\right)}\\
\qquad\qquad +144
\end{array}
$$

Zkouška:
$\left(a+3\right)\cdot\left(2a^3-6a^2+17a-48\right)+144=2a^4-6a^3+17a^2-48a+6a^3-18a^2+51a-144+144=$
$2a^4-a^2+3a$

Pedagogická poznámka: V obou bodech předchozího příkladu je největším problémem odečtení výsledků zpětného násobení v naprosté většině členů se dvěma zápornými znaménky (mínus mínus dává plus), proto při hledání chyby je nejvýhodnější zaměřit se nejdříve právě na tato místa.

Př. 2: Zapiš jako jednu jednoduchou mocninu. Hledej vzorec $\left(a^m\right)^n=$.

a) $\left(2^2\right)^3$ b) $\left(3^2\right)^4$ c) $\left(a^3\right)^5$ d) $\left(x^n\right)^2$ e) $\left(y^3\right)^k$

a) $\left(2^2\right)^3=2^2\cdot2^2\cdot2^2=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^6$

b) $\left(3^2\right)^4=3^2\cdot3^2\cdot3^2\cdot3^2=3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=3^8$

c) $\left(a^3\right)^5=a^3\cdot a^3\cdot a^3\cdot a^3\cdot a^3=a^{15}$

d) $\left(x^n\right)^2 = x^n \cdot x^n = x^{n+n} = x^{2n}$

e) $\left(y^3\right)^k = \underbrace{y^3 \cdot y^3 \cdot \ldots \cdot y^3}_{k \text{ krát}} = y^{3k}$

$\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ krát}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \cdot n \text{ krát}} = a^{m \cdot n}$

Př. 3: Umocni jednočleny.

a) $(ab)^3$ b) $\left(x^2 y\right)^2$ c) $\left(3ab^2\right)^3$ d) $\left(-2x^4 y\right)^4$ e) $\left(-3^2 ab^3\right)^3$

a) $(ab)^3 = a^3 b^3$ b) $\left(x^2 y\right)^2 = \left(x^2\right)^2 \cdot y^2 = x^4 y^2$ c) $\left(3ab^2\right)^3 = 3^3 a^3 \left(b^2\right)^3 = 3^3 a^3 b^6$

d) $\left(-2x^4 y\right)^4 = (-2)^4 \cdot \left(x^4\right)^4 \cdot y^4 = 2^4 x^{16} y^4$ (sudá mocnina záporného čísla je kladné číslo)

e) $\left(-3^2 ab^3\right)^3 = \left(-3^2\right)^3 \cdot a^3 \cdot \left(b^3\right)^3 = -3^6 a^3 b^9$ (na druhou umocňujeme pouze číslo 3, až výsledek tohoto umocnění násobíme mínusem, lichá mocnina záporného čísla je záporné číslo)

Pedagogická poznámka: Jediným zádrhelem jsou body d) a e) obsahující umocňování záporného čísla.

Př. 4: Vypočti.

a) $(b+6)^2$ b) $(2u-1)^2$ c) $(3a+2)^2$ d) $(4b-3)^2$

e) $(2x+5)^2$ f) $(2x-7)^2$ g) $(xy+2)^2$ h) $(2xy-5y)^2$

a) $(b+6)^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot 6 + 6^2 = b^2 + 12b + 36$

b) $(2u-1)^2 = (2u)^2 - 2 \cdot 2u \cdot 1 + 1^2 = 4u^2 - 4u + 1$

c) $(3a+2)^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 2 + 2^2 = 9a^2 + 12a + 4$

d) $(4b-3)^2 = (4b)^2 - 2 \cdot 4b \cdot 3 + 3^2 = 16b^2 - 24b + 9$

e) $(2x+5)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25$

f) $(2x-7)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 7 + 7^2 = 4x^2 + 28x + 49$

g) $(xy+2)^2 = (xy)^2 + 2 \cdot xy \cdot 2 + 2^2 = x^2 y^2 + 4xy + 4$

h) $(2xy-5y)^2 = (2xy)^2 - 2 \cdot 2xy \cdot 5y + (5y)^2 = 4x^2 y^2 - 20xy^2 + 25y^2$

Př. 5: Doplň rámeček tak, aby rovnost platila.

a) $\left(x+\square\right)^2=x^2+2x+1$ b) $\left(x-\square\right)^2=x^2-6x+9$

c) $\left(x+\square\right)^2=x^2+2x+4$ d) $\left(3a+\square\right)^2=9a^2+12a+4$

e) $\left(2k-\square\right)^2=4k^2-12kl+9l^2$

Zkusíme upravit výrazy „z druhé strany“ – z umocněného tvaru vyrobíme vzorec.

a) $\left(y+\square\right)^2=y^2+2y+1=y^2+2y\cdot 1+1^2=\left(y+1\right)^2\Rightarrow\boxed{1}$

b) $\left(x-\square\right)^2=x^2-6x+9=x^2+2y\cdot 3+3^2=\left(x-3\right)^2\Rightarrow\boxed{3}$

c) $\left(x+\square\right)^2=x^2+2x+4=x^2+2x\cdot 1+2^2$ $\Rightarrow$ neexistuje číslo, které bychom mohli doplnit do čtverečku (podle prostředního členu bychom měli doplnit číslo 1, podle posledního členu číslo 2, což nemůžeme udělat najednou).

d) $\left(3a+\square\right)^2=9a^2+12a+4=\left(3a\right)^2+2\cdot\left(3a\right)\cdot 2+2^2=\left(3a+2\right)^2\Rightarrow\boxed{2}$

e) $\left(2k-\square\right)^2=4k^2-12kl+9l^2=\left(2k\right)^2-2\cdot\left(2k\right)\cdot\left(3l\right)+\left(3l\right)^2=\left(2k-3l\right)^2\Rightarrow\boxed{3l}$

Př. 6: Vypočti bez tabulek, kalkulačky i násobení pod sebou.

a) 22^2 b) 32^2 c) 29^2 d) 201^2 e) 499^2

a) $22^2=\left(20+2\right)^2=20^2+2\cdot 20\cdot 2+2^2=400+80+4=484$

b) $32^2=\left(30+2\right)^2=30^2+2\cdot 30\cdot 2+2^2=900+120+4=1024$

c) $29^2=\left(30-1\right)^2=30^2-2\cdot 30\cdot 1+1^2=900-60+1=841$

d) $201^2=\left(200+1\right)^2=200^2+2\cdot 200\cdot 1+1^2=40000+400+1=40401$

e) $499^2=\left(500-1\right)^2=500^2-2\cdot 500\cdot 1+1^2=250\,000-1\,000+1=249\,001$

Shrnutí: